**CUERPO DE LAS FRACCIONES RACIONALES**

Wall, V.. Cuaderno 2. Álgebra. Pág. 109

Thomas, G. (2006) Cálculo. Una variable. Ed. Pearson Addison Wesley. Pág. 570.

Sabemos que el conjunto K[x] de los polinomios con una indeterminada sobre un cuerpo conmutativo K de un dominio de integridad. Sin embargo, la multiplicación de polinomios no define estructura de grupo en tal conjunto, puesto que no todo polinomio admite inverso; por consiguiente, K[x] no es un cuerpo.

Se plantea ahora en K[x] el mismo problema que se estudió en Álgebra 1 a propósito de la construcción del cuerpo de los números racionales a partir del anillo de los enteros relativos. Se trata aquí de prolongar el dominio de integridad K[x] a un conjunto más amplio, y que sea un cuerpo conmutativo. O sea, el problema es la:

*construcción del cuerpo de las fracciones de un dominio cualquiera de integridad.*

**Fracciones racionales.**

Recibe el nombre de *fracción racional* un par (a, b) de K[x] x K\*[x]; a se llama *numerador*, y b *denominador.* Se denota por .

Dos fracciones racionales y son equivalentes si ad = bc, y se escribe ≡ .

La anterior equivalencia en K[x] x K[x]\*, cuyo conjunto cociente, FK[x], es el conjunto de las clases de equivalencia de las fracciones racionales con una indeterminada sobre el cuerpo K. Cuando se desee poner en evidencia un representante a/b de una clase de FK[x] se utilizará la notación para designar dicha clase.

**Fracción irreducible.**

Sea Si d = mcd(a , b) existen entonces dos polinomios y de K[x] tales que:

y

de donde se deduce que:

La fracción a1/b1, cuyos términos son primos entre sí, se llama ***irreducible****.* Es el representante más sencillo de la clase

**Leyes de composición en**

Definamos en FK[x] dos leyes de composición interna:

Adición:

Multiplicación:

(F*K*[x] , + , . )

Estas dos leyes en F*K*[x] no dependen de los representantes elegidos para las clases; son asociativas y conmutativas

La adición admite como elemento neutro y la multiplicación, Estas dos leyes dan a FK[x] estructura de grupo conmutativo.

El opuesto de para la adición es . Para la multiplicación, el inverso de es .

Además, como la segunda operación es distributiva respecto de la adición, se verifica el teorema siguiente:

**Teorema**.

F*K*[x] *es un cuerpo conmutativo.*

Descomposición de una fracción racional sobre un cuerpo conmutativo

A continuación, se mostrará cómo expresar una función racional (un cociente de polinomios) como una suma de fracciones más sencillas, denominadas fracciones parciales. Por ejemplo, la fracción racional, que pueden descomponerse de la manera que se muestra a continuación:

Esta igualdad puede verificarse de manera algebraica colocando las fracciones del lado derecho con un denominador común, . La habilidad adquirida para escribir fracciones racionales como tal suma también es útil en otros contextos, por ejemplo, cuando se utilizan ciertos métodos de transformación para resolver ecuaciones diferenciales.

El método para reescribir fracciones racionales como una suma de fracciones más sencillas se denomina descomposición de la fracción racional en fracciones simples.

*Consideremos el conjunto FK[x] de las clases de fracciones racionales sobre un cuerpo conmutativo cualquiera K. A todo elemento de FK[x] asociamos su representante irreducible a/b (m.c.d. (a,b) = 1).*

*Hagamos la división euclidiana de a por b en K[x]:*

*a = bq + r g(r) < g(b)*

*En FK[x], se podrá entonces escribir:*

con *g(r) < g(b)*

La fracción r/b es irreducible [puesto que m.c.d.(*a*, b) = m.c.d.(b, r)], y el grado de su numerador es estrictamente inferior al de su denominador. El polinomio q se llama *parte entera de la fracción racional a/b*. Es claro que **la descomposición es única**, debido a la unicidad de la división euclidiana en K[x].

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 1 |
|  |  |
| P = QC + R | |

Teorema 2*.*

*Sea* ∈ *FK[x] tal que: m.c.d.(r, b)= 1; g( r) < g(b) y b = b1b2 … bn*, *siendo los n polinomios bi primos entre sí dos a dos; existen entonces n polinomios ri tales que:*

*(*∀*i* ∈ *[1, n] g(ri ) < g(bi); m.c.d.(ri, bi) = 1*

*Además, a cada descomposición b1b2 … bn de b en factores primos dos a dos, corresponde una única descomposición de r/b tal como la anterior.*

|  |  |
| --- | --- |
|  | x = 0 x = -1 x = 1  Igualando numeradores:  Si x = 0 → 2 = -A → A = -2  Si x = 1 → 4 = 2C → C = 2  Si x = -1 → 2 = 2 B → B = 1 |
|  |

Otro ejemplo, dada la fracción racional:

Primeramente, se analizan los grados de los polinomios del numerador y del denominador de la fracción racional. Como en este caso, el grado de numerador es menor que el grado del denominador se procede a la descomposición. Para ello, se buscan los ceros del denominador:

que en este caso son y

Como se tienen dos raíces reales distintas para el denominador, la fracción racional se descompone la suma de dos fracciones racionales simples (fracciones racionales donde los polinomios del numerador y del denominador son coprimos, el numerador tiene menor grado que el denominador y el denominador es mónico).

Los polinomios de los denominadores se construyen haciendo x menos cada una de las raíces. Y los polinomios de los numeradores, que deben ser de grado cero ya que los denominadores son de grado 1, son constantes A y B (son números reales), que deben ser calculados.

Para esto, se resuelve la suma de fracciones racionales del segundo miembro:

Como los denominadores son iguales, para que las fracciones racionales sean iguales, los numeradores también deben ser iguales:

=

Para hallar los valores de A y B se puede desarrollar el segundo miembro e igualar los coeficientes de los términos semejantes, esto genera un sistema de ecuaciones que debe resolverse:

=

como B = 5 – A, se reemplaza en la segunda ecuación y queda:

-3 A + 5 – A = -3

- 4 A = - 8 ⇒ A = 2 y B = 3

De donde:

O bien, para hallar los valores de A y B, también se puede hacer, partiendo de que:

=

Se le asigna a x los valores de los ceros de la función polinómica del denominador que se habían hallado:

x = -1 ⇒ = ⇒ -8 = A (-4) ⇒ A = 2

x = 3 ⇒ = ⇒ 12 = B 4 ⇒ B = 3

De donde:

**Descripción general del método**

El éxito al escribir una fracción racional como una suma de fracciones parciales depende de dos cosas:

• El grado de f (x) debe ser menor que el grado de g(x). Esto es, la fracción debe ser propia. Si no es así, divida f (x) entre g(x) y trabaje con el residuo.

• Se debe conocer los factores de g(x). En teoría, cualquier polinomio con coeficientes reales puede escribirse como un producto de factores lineales con coeficientes reales y factores cuadráticos con coeficientes reales. En la práctica, puede ser difícil obtener estos factores.

A continuación, veremos cómo determinar las fracciones parciales de una fracción propia cuando se conocen los factores de g(x).



|  |  |
| --- | --- |
| = | Si x = -1 A = -1  Para hallar B y C, se asignan dos valores cualesquiera a x:  Si x = 0 0 = -1 + C (1) C = 1  Si x = 1 1 = -3 + 2B+2  2 = 2B B = 1 |

Otro ejemplo:

|  |  |
| --- | --- |
|  | raíz x = -2 que tiene multiplicidad 3  x = -2 → 1 = C  x = 0 → 3 = 4A + 2B + 1 → 2A + B = 1  x = 1 → 4 = 9A + 3B + 1 → 3A +B = 1  restando m. a m.: -A = 0 A = 0  B = 1 |
|  |  |
|  |  |
|  |  |